

Modelación hidrológica empleando isoyetas de relieve, una aproximación geoestadística

RAÚL BECERRA-SORIANO & ALFONSO GUTIÉRREZ-LÓPEZ

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, IMTA, Subcoordinación de Hidrología y Mecánica de Ríos, Paseo Cuauhnáhuac 8532, CP 62780, Jiutepec, Morelos, México

rabs@hotmail.com, agutierrez@tlaloc.imta.mx

Resumen En el marco del cálculo de la disponibilidad hídrica, este trabajo plantea un esquema geoestadístico para describir la distribución espacial de la precipitación, considerando el relieve topográfico como el principal generador de su variabilidad espacial. Se utiliza un variograma direccional ajustado a los datos de la topografía, como una ecuación de transferencia para generar campos de lluvia con relieve. Los resultados muestran que la disponibilidad hídrica de una región, varían cuando se estima el volumen anual precipitado, empleando isoyetas tradicionales, respecto al calculado con isoyetas de relieve.

Palabras clave geoestadística; kriging; precipitación media; isoyetas; relieve

Hydrological modelling using relief-isohyets: a geostatistical approximation

Abstract This paper describes the spatial structure of precipitation by a geostatistical approach, using topography as a main component in the rain field variability. A directional semi-variogram fixed to the topography data was used for rain field construction. When the mean annual precipitation is calculated using traditional isohyets, the results show important variations of hydrological availability in the region, with respect to the relief-isohyets.

Key words geostatistics; kriging; mean precipitation; isohyets; relief

INTRODUCCIÓN

Con el incremento en la capacidad de procesamiento de información durante la década de los 1980s, se establecieron metodologías que parametrizan y describen la distribución espacial de la precipitación (Gyasi-Agyei, 1999). Con el aumento de la parametrización y la reciente aplicación de los métodos estocásticos y multivariados en el análisis de las series hidrológicas, los errores cometidos en las interpolaciones son cada vez menores debido a que los modelos empleados son cada vez mas complejos (Goovaerts, 2000; Herr & Krzysztofowicz, 2004; Young, 2005). El concepto de regionalización hidrológica se inició con (Matheron, 1969; Delhomme, 1978), Para el caso de la hidrología y específicamente en la interpolación espacial de la precipitación tradicionalmente se realiza la interpolación óptima con kriging (Ahrens, 2005), en estos análisis se obtiene el modelo que mejor ajustó al variograma experimental. Otros trabajos realizan un análisis exhaustivo del variograma, analizando la anisotropía de los datos (Desbarats *et al.*, 2002; Lloyd, 2004). Con el objetivo de estudiar adecuadamente la regionalización hidrológica se presentan los siguientes conceptos.

INTERPOLACIÓN ESPACIAL

La interpolación espacial es un procedimiento matemático utilizado para predecir el valor de un atributo en una localidad precisa a partir de valores obtenidos de puntos vecinos, ubicados al interior de la misma área de estudio. La interpolación se utiliza para transformar un número finito de observaciones, por ejemplo cotas de terreno, en un espacio continuo de manera que su patrón espacial sea comparable con aquel presentado por las observaciones puntuales de base (Burrough & McDonnell, 1998). La literatura describe diferentes métodos de interpolación. Estos se clasifican en globales y locales, de acuerdo a la cantidad de información que utilizan, y en exactos e inexactos, de acuerdo al valor de las estimaciones respecto a los datos de origen (Tabla 1).

VARIABLES REGIONALES

Las variables regionales designan un fenómeno ocurrido en una cierta área y en un lapso de tiempo formando una estructura espacio-temporal definida. Generalmente en los modelos regionales la lluvia aparece como una función aleatoria $Z(x_i, y_i)$ conocida por sus magnitudes históricas medidas

Tabla 1 Métodos de interpolación especial.

Método	Global/Local	Tipo de interpolación
Clasificación	Global	Inexacta
Superficies de tendencia	Global	Inexacta
Modelos de regresión	Global refinamiento local	Inexacta
Polígonos de Thiessen	Local	Exacta
Interpolación lineal	Local	Exacta
Inverso de la distancia y medias móviles	Local	Inexacta cuando se aplica un suavizado de la superficie interpolada
Kriging	Local, pero con un variograma global	Exacta

en diversos puntos experimentales $Z(t_i)$. El principio de estos métodos de transferencia se resume en la búsqueda de un estimador lineal:

$\hat{Z}(x, y) = \sum w_i(x, y) Z(x_i, y_i)$; en donde los coeficientes verifiquen la condición de sesgo nulo:

$$\sum w_i(x, y) E[Z(x_i, y_i)] - E[Z(x, y)] = 0 \tag{1}$$

Un criterio de minimización del error cuadrático medio de estimación puede expresarse como:

$$w_i E[Z_i Z_j] - E[Z_i Z_j] = 0 \tag{2}$$

donde: $E[Z(t)]$ es la media de $Z(x,y)$ sobre el espacio de eventos $E[Z_t, Z_t]$. De esta forma, el objetivo principal de esta transferencia es calcular los coeficientes $w_i(x,y)$ del estimador $Z(x, y)$. El cálculo de los coeficientes w_i , se obtiene de solucionar el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones 1 y 2; sin embargo, no es posible resolverlo en tanto no se disponga de una función de covarianza $E[Z_t, Z_t]$ que permita calcular los términos $E[Z_t, Z_i]$. El principio de la interpolación espacial se basa en una *hipótesis de homogeneidad* llamada “hipótesis intrínseca” menos restrictiva que la tradicional hipótesis de estacionariedad conocida como hipótesis de orden 2. La hipótesis de homogeneidad supone ante todo que la derivada del valor medio de las mediciones es localmente constante; esto implica que los dos primeros momentos de las variables estudiadas se correlacionan en forma espacial con una función aleatoria invariante dentro de la región hidrológicamente homogénea, esto es:

$$E[Z_{t+h} - Z_t] = 0 \tag{3}$$

$$E[(Z_{t+h} - Z_t)^2] = 2\gamma(h) \tag{4}$$

Con las funciones de covarianza:

$$\gamma(h) = [C(0) - C(h)]; C(h) = E[Z_t - m(h) Z_{t+h} - m(h)]$$

De esta forma, cualquier función aleatoria $Z(x, y)$ será llamada *Función Aleatoria Intrínseca de orden 1*, en donde la función γ *variograma* permite expresar así los términos de la covarianza, independientemente de la derivada de la media de las mediciones locales. Esta formulación es también la base del procedimiento del kriging ordinario. Con una función de covarianza, podríamos decir *generalizada*, se tienen las herramientas necesarias para realizar una transferencia de información hidrológica (Creutin, 1979).

INTERPOLACIÓN POR KRIGING

En el caso de la hipótesis de estacionariedad de segundo orden, la media m se considera constante (Obled, 1996). La condición insesgada es: $\sum w_i(x, y) E[Z(x_i, y_i)] - E[Z(x, y)] = 0$ con: $E[Z(x_i, y_i)] = E[Z(x, y)] = m$; se escribe: $w_i = 1$.

La condición óptima $E[(\hat{Z} - Z)^2]$ mínima se escribe:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_i} E[(Z - \hat{Z})^2] &= \frac{\partial}{\partial w_i} \left\{ E[(Z - \sum_i w_i Z_i)^2] \right\} - 0 \\
&= \frac{\partial}{\partial w_i} \left\{ E[Z^2] - 2 \sum_i w_i E[Z_i Z_0] + \sum_i \sum_j w_i w_j E[Z_i Z_j] \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial w_i} \left\{ C(0) - 2 \sum_i w_i C(t^i - t) + \sum_i \sum_j w_i w_j C(t^i - t) \right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

Si se tiene en cuenta la condición insesgada con μ multiplicador de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial w_i} E[(Z - \hat{Z})^2 + \mu] = \frac{\partial}{\partial w_i} \left\{ C(0) - 2 \sum_i w_i C(t^i - t) + \sum_i \sum_j w_i w_j C(t^i - t) + \mu \sum_i w_i \right\} = 0$$

sea: $\sum_i C(t^i - t^j) + \mu' = C(t^i - t)$; $\mu' = \mu/2$; En el caso de la hipótesis intrínseca en donde se introduce el variograma como una función de la covarianza, le sistema de Krigeage simple será:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1; \quad \sum_{i=1}^n w_i \gamma(t^i + t^j) + \mu' = \gamma(t^i - t)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma(t^1, t^1) & \dots & \gamma(t^1, t^n) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma(t^n, t^1) & \dots & \gamma(t^n, t^n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(t^1, t) \\ \vdots \\ \gamma(t^n, t) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

De esta forma se puede representar el variograma sobre un diagrama $[h, \gamma(h)]$.

DESCRIPCIÓN DE LA ZONA EN ESTUDIO Y DE LA RED PLUVIOMÉTRICA

La cuenca del río Amacuzac, en el centro de la república mexicana, tiene una superficie de 7821 km², pertenece a la cuenca del río Balsas, y tiene una red pluviométrica que consta de 84 estaciones, con un periodo de registro de 1950–1999 (Fig. 1). Se analizó la precipitación media anual histórica con un mínimo de 5 años, los valores que varían entre 566 y 1554 mm.

Como primer análisis se define el comportamiento del relieve en la zona de estudio, utilizando el MDE (Fig. 2), se aprecia una buena distribución de las estaciones climatológicas para las diferentes elevaciones de la cuenca. También se pueden identificar dos regiones: la montañosa (norte, oeste y sur) y la de planicie (centro y este); debido a que la precipitación se registra de manera diferente en ellas, se buscará preservar el comportamiento del régimen de precipitación en las isoyetas de relieve.

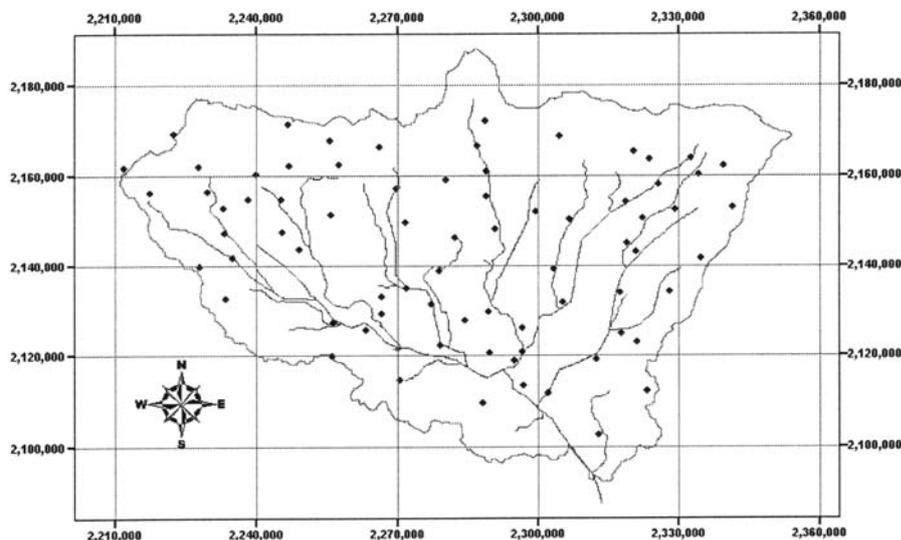


Fig. 1 Distribución espacial de las estaciones climatológicas.

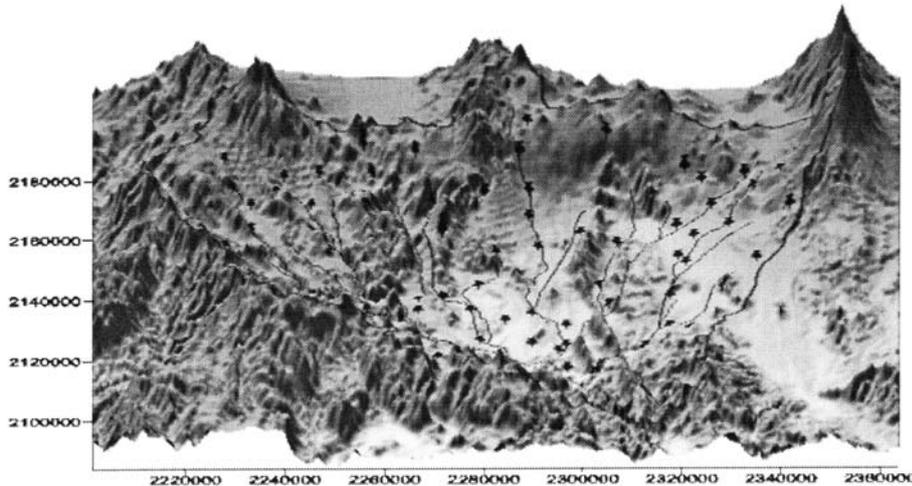


Fig. 2 Representación tridimensional (MDE) de la zona de estudio.

METODOLOGÍA

Para el ajuste del variograma se utilizaron dos criterios: mínimos cuadrados y mínimos cuadrados absolutos (Cressie, 1991), además se realizó una comparación entre estos dos criterios (Zimmerman & Zimmerman, 1991). A continuación se realizaron los ajustes de los modelos: exponencial, gaussiano, potencial, cuadrático, esférico y el cúbico. Se analizaron primero los datos de precipitación, para los cuales se ajustaron los seis modelos, además para cada modelo se revisó, utilizando la anisotropía de los datos, qué dirección presentaba mejor ajuste al modelo, teniendo cuatro direcciones principales (N-S, NE-SW, E-O y SE-NW), para la precipitación, el modelo cúbico presentó el mejor ajuste, es decir, es el modelo que mejor acota a la precipitación. En donde, el factor de escala es $C = 36\ 100$, el de rango es de 0.332, y una anisotropía de radio 2 y un ángulo 89.64° (Fig. 3(a)).

$$\text{Ecuación del modelo cúbico: } \gamma(h) = 7h^2 - 8.75h^3 + 3.5h^5 - 0.75h^7 \tag{7}$$

De manera análoga se ajusta el modelo a los datos de topografía. Donde, el modelo potencial fue el de mejor ajuste, con un factor de escala es 1.29, un rango 1, una potencia de 1.16 y la anisotropía tiene un radio de 2 y un ángulo 179° (Fig. 3(b)).

$$\text{Ecuación del modelo potencial: } \gamma(h) = C|h^n| \text{ donde: } 0 < n < 2 \tag{8}$$

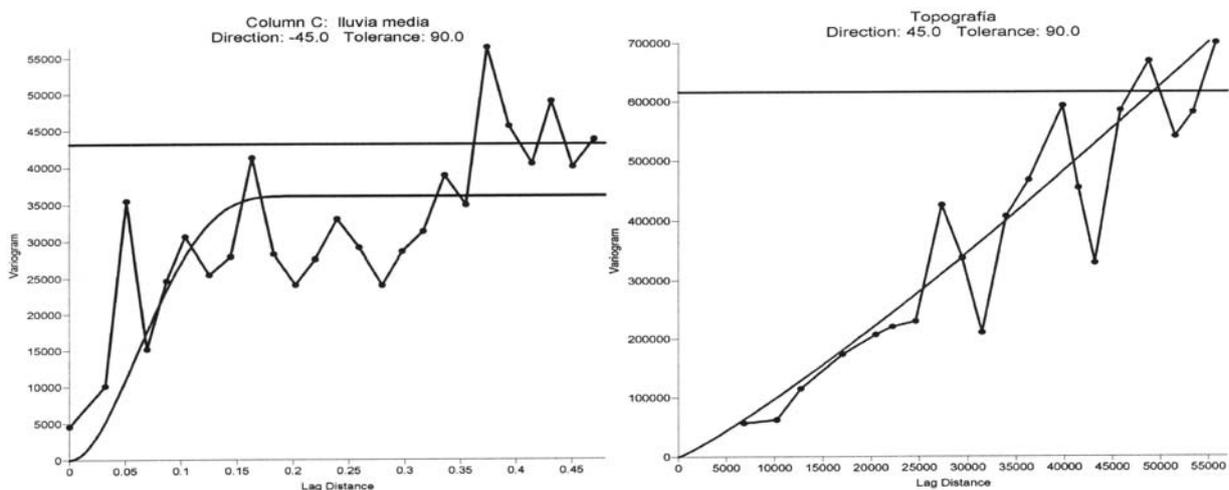


Fig. 3 (a) Variograma cúbico ajustado a los datos de precipitación. (b) Variograma potencial ajustado a los datos de topografía.

Aplicación con la interpolación con kriging

Terminados los ajustes de los modelos, se procede a realizar la distribución espacial de la precipitación. Se toman los 84 registros de las estaciones climatológicas y se realizó la interpolación utilizando el modelo cúbico, dando como resultado; un plano de isoyetas tradicional (Fig. 4). Como se puede ver en la Fig. 4, no existe una tendencia para la cual se puedan identificar las dos regiones mencionadas; lo que representa una desventaja al utilizar isoyetas tradicionales. Análogamente, se realiza la distribución espacial de la precipitación, utilizando el variograma direccional (número de pares aproximado igual a un millón y medio) obtenido del modelo topográfico; en la Fig. 5 se aprecia el resultado de este procedimiento. Se puede observar una marcada tendencia en la isoyeta 1,000 mm, la cual sigue la frontera de la zona montañosa; lo cual representa una gran ventaja si se considera que el principal factor generador de lluvia es el relieve. A manera de comparación se obtuvo la precipitación media de la región, de esta forma se obtiene que: el promedio aritmético es de 965 mm, utilizando polígonos de Thiessen de 975 mm, con isoyetas tradicionales 980.6 mm y con las isoyetas con relieve se obtuvieron 994.6 mm. La diferencia de 14 mm entre los métodos de isoyetas, se considera importante, ya que esta diferencia representa un volumen anual de 109 Hm³ adicionales; cuando se calcula con isoyetas con relieve.

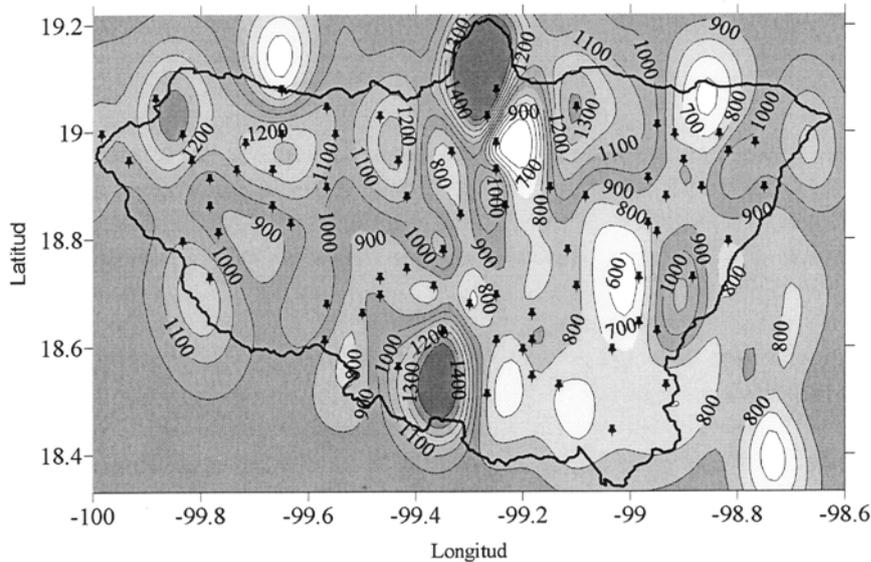


Fig. 4 Isoyetas tradicionales, en mm

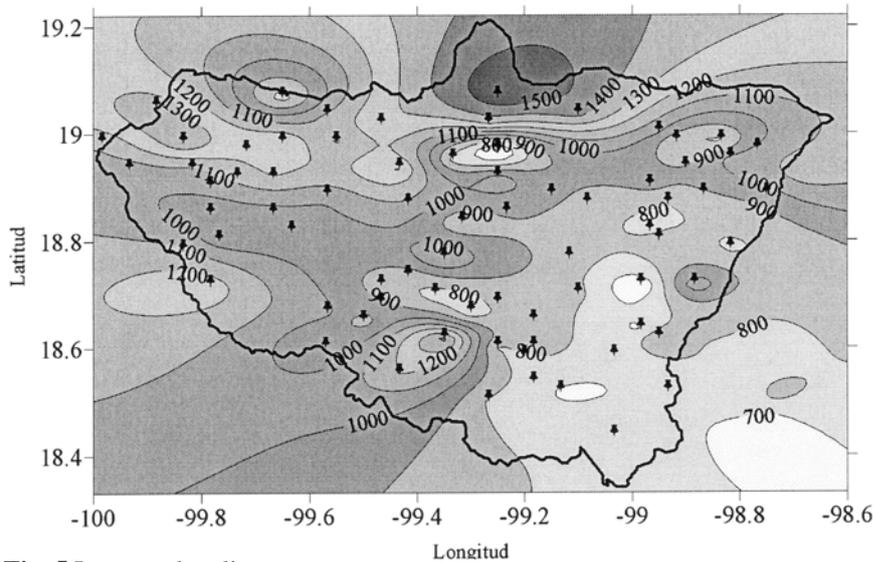


Fig. 5 Isoyetas de relieve, en mm.

CONCLUSIONES

Haciendo un análisis de las Figs 4 y 5 podemos decir que los resultados obtenidos cumplen con lo esperado, es decir; la ecuación del variograma direccional de topografía afecta la distribución de la precipitación, haciendo que la correlación entre estas dos variables (lluvia-relieve) aumente. Además; reforzando la hipótesis de que la topografía es el principal generador de precipitación en una cuenca. La calibración, validación y análisis de sensibilidad de este procedimiento hidro-geoestadístico, se llevaron a cabo en cuencas aforadas, en donde el control hidrométrico permite validar los resultados. Finalmente se espera que este esquema pueda aplicarse para estimar la precipitación en sitios sin registros, considerando las características fisiográficas y topográficas de la región.

REFERENCIAS

- Ahrens, B. (2005) Distance in spatial interpolation of daily rain gauge data. *Hydrol. Earth System Sci.* **2**, 1893–1923.
- Burrough, P. & McDonnel, R. (1998) *Principles of Geographical Information Systems*. Oxford University Press, New York, USA.
- Chica-Olmo, M. (1987) Análisis Geoestadístico en el Estudio de la Explotación de Recursos Minerales. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.
- Clark & Isobel, (1977) *Practical Geostatistics*. Geostokos Limited, United Kingdom. Versión digital descargada <http://uk.geocities.com/drisobelclark/PG1979>.
- Cressie, N. (1991) *Statistics for Spatial Data*. John Wiley and Sons, New York, USA.
- Creutin, J. (1979) Méthodes d'interpolation optimale de champs hydrométéorologiques. Comparaisons et applications à une série d'épisodes pluvieux cévenols. Thesis Doctoral USMG, INP Grenoble, France.
- David, M. (1977) *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier Scientific Publishing Company, New York, USA.
- Desbarats, A. J., Logan, C. E., Hinton, M. J. & Sharpe, D. R., (2002) On the kriging or water using collateral information from a digital elevation model. *J. Hydrol.* **255**, 25–38.
- Delhomme, J. P. (1978) Applications de la théorie des variables régionalisées dans les sciences de l'eau. *Bull B.R.G.M.* **III**(4), 341–375.
- Goovaerts, P. (2000) Geoestadistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation in rainfall. *J. Hydrol.* **228**, 113–129.
- Gyasi-Agyei, Y. (1999) Identification of regional parameters of stochastic model for rainfall disaggregation. *J. Hydrol.* **223**, 148–163.
- Henry, D. Y. & Krzysztofowicz, R. (2004) Generic probability distribution of rainfall in space: the bivariate model. *J. Hydrol.* **306**, 234–263.
- Journel, A. G. & Huijbregts, C. J. (1978) *Mining Geostatistics*. Academic Press, New York, USA.
- Lehucher, P. M. (1986) Etude des épisodes pluvieux intenses sur la région Provence-Côte d'Azur-Riviera Italienne. Thesis Doctorat, INP Grenoble, France.
- Lloyd, C. D. (2005) Assessing the effect of integrating elevation data into the estimation of monthly precipitation in Great Britain. *J. Hydrol.* **308**, 128–150.
- Matheron, G. (1969) *Le krigeage universel*. Les Cahiers du C.M.M., fasc. I.
- Krajewski, S. A. & Gibbs, B. L. (1993) *A Variogram Primer*. Gibbs Associates.
- Samper, C. & Carrera, R. (1996) *Geoestadística, Aplicaciones a la hidrogeología subterránea* (2e édn). Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- Young, A. R. (2005) Stream flow simulation within UK ungauged catchments using a daily rainfall-runoff model. *J. Hydrol.* **320**, 155–172.
- Zimmerman, D. & Zimmerman, M. (1991) A comparison of spatial semivariogram estimators and corresponding ordinary kriging predictors. *Technometrics* **33**(1), 77–91.